УДК.: 519.8

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ЭФФЕКТИВНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Жусупбаева Гульзат Амангельдиевна (0000-0003-1106-0183), Умарова Мария (0000-0002-4784-1937), Турдубаева Айбегим Таалайбековна (0009-0009-9438-5872)

Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И. Скрябина г. Бишкек

Аннотация: *В статье сформулирована задача размещения производства с выпуклыми функциями транспортных и производственных затрат, приведен способ решения задачи размещения производства в случае, когда функции выпуклы, непрерывны. Для решения задачи в этом случае используется метод, основанный на линеаризации выпуклых функций входящих в целевую функцию. Применение этого метода позволило аппроксимировать задачу транспортной задачи линейного программирования. Способ решения задачи демонстрирован на числовом примере.*

Ключевые слова: *предприятия, функция, оптимальный план, продукции, задача размещения, метод последовательных расчетов, приближенный метод*

ӨНДҮРҮШ ИШКАНАЛАРЫН НАТЫЙЖАЛУУ ЖАЙГАШТЫРУУ ҮЧҮН ОПТИМАЛДУУ ТАНДОО МАСЕЛЕЛЕРИН ЧЕЧҮҮДӨ ЭКОНОМИКАЛЫК ЖАНА МАТЕМАТИКАЛЫК ЫКМАЛАР

Жусупбаева Гульзат Амангельдиевна (0000-0003-1106-0183), Умарова Мария (0000-0002-4784-1937), Турдубаева Айбегим Таалайбековна (0009-0009-9438-5872)

Кыргыз улуттук агрардык университети, Бишкек ш.

Аннотация: *Макалада транспорттук жана өндүрүштүк чыгымдардын томпок функциялары менен өндүрүштү жайгаштыруу маселеси баяндалган жана функциялар томпок жана үзгүлтүксүз болгон учурда өндүрүштү жайгаштыруу маселесин чечүүнүн методу каралган. Бул учурда маселени чечүү үчүн максат функциясына кирген томпок функцияларды сызыктуу кылуунун негизиндеги ыкма колдонулат. Бул ыкманы колдонуу сызыктуу программалоонун транспорттук маселесин жакындатууга мүмкүндүк берет. Маселени чечүү ыкмасы менен сандык маанилерди колдонгон мисал келтирилген.*

Өзөктүү сөздөр: *ишкана, функция, оптималдуу план, продукция, жайгаштыруу маселеси, ырааттуу эсептөө ыкмасы, жакындатылган ыкма*

ECONOMIC AND MATHEMATICAL METHODS OF SOLVING PROBLEMS OF SELECTING THE OPTIMAL VARIANT OF EFFECTIVE PLACEMENT OF PRODUCTION ENTERPRISES

Zhusupbaeva Gulzat (0000-0003-1106-0183), Umarova Maria (0000-0002-4784-1937), Turdubaeva Aibegim (0009-0009-9438-5872)

Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Scriabin, Bishkek

Annotation: *In the article the problem of location of production with convex functions of transport and production costs is formulated, and provides a method for solving the problem of production location in the case where the functions are convex and continuous. To solve the problem in this case, a method is used based on the linearization of convex functions included in the objective function. The use of this method made it possible to approximate the transport problem of linear programming. The method for solving the problem is demonstrated using a numerical example.*

Keywords: *enterprises, function, optimal plan, products, problem of placement, method of consecutive calculations, approximate method*

1. Введение

Многие проблемы экономики, в том числе и задачи эффективного размещения производящих и перерабатывающих предприятий хозяйствующих субъектов в различных отраслях сводятся к задачам размещения производства в различных постановках (Жусупбаев А., 2015). В связи с этим разработка методов и алгоритмов их решения, учитывающая специфику возникающих задач, является первоочередной задачей экономико-математической науки посвященных моделям и методам решения задач размещения, как в дискретной, так и непрерывной постановке.

В настоящее время опубликовано множество научных статей и ряд монографий. Из анализа имеющихся работ следует, что наиболее исследованными являются задачи размещения предприятий в дискретной постановке, а среди задач размещения производства в непрерывной постановке – задачи размещения производства, когда функции, отражающие зависимость стоимости производимой продукции от объема производства, – либо линейные непрерывные на всей числовой оси за исключением начала координат, где терпят разрыв, либо вогнутые непрерывные. Особенностью таких задач размещения является их многоэкстремальность.

В статье сформулирована задача размещения производства с выпуклыми функциями транспортных и производственных затрат, и продемонстрирован пример, использующий числовые значения.

2. Материалы и методы исследования

Среди существующих методов, для задач размещения хорошо себя зарекомендовали алгоритмы, основанные на методе последовательных расчетов В.П. Черенина, В.Р. Хачатурова. Эти алгоритмы позволяют находить точное решение задачи размещения, когда функции, определяющие производственные затраты - линейные на всей числовой оси, за исключением начала координат, где они имеют разрыв. Применение этого метода совместно с запрещающими тарифами позволило аппроксимировать задачу транспортной задачи линейного программирования.

Рассмотрим задачу, которая описывает некоторые общие условия размещения предприятий, перерабатывающих сельскохозяйственную продукцию.

Производственная компания располагает двумя предприятиями A_i, $i=1,2$, имеющими возможность производить однородные продукции в неограниченном количестве x_i, $i=1,2$. Производимая продукция доставляется двум потребителям B_j, $j=1,2$, величина спроса которых равны в объеме $b=\{4,8\}$.

Транспортные расходы определяются заданной функцией $\varphi_{ij}(x_{ij})$, $i=1,2$, $j=1,2$, а объем перевозимой продукции ограничен нижними и верхними пределами $[\alpha_{ij},\beta_{ij}]$, т.е.

$$\varphi_{11}(x_{11}) = x_{11}^4 - x_{11}, \quad 1 \le x_{11} \le 4,$$
$$\varphi_{12}(x_{12}) = 5x_{12}, \qquad 0 \le x_{12} \le 5,$$
$$\varphi_{21}(x_{21}) = -x_{21}^3 + x_{21}^2, \ \ 0 \le x_{21} \le 2,$$
$$\varphi_{22}(x_{22}) = 2x_{22}^2 - 5x_{22}, \quad 2 \le x_{22} \le 6.$$

Известна для каждого предприятия $A_i, i = 1,2$ функция $f_i(x_i)$, $i = 1,2$, определяющая затраты на производство продукции, т.е.

$$f_1(x_1) = 2x_1^2 + 1, \ \ x_1 \ge 0, \quad f_2(x_2) = x_2^2 + 1, \ \ x_2 \ge 0.$$

Требуется определить оптимальный план производства x_i, $i = 1,2$, объем перевозок $x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, при которых суммарные затраты на производство и перевозки были бы минимальны.

Математическая модель задачи имеет вид.

Найти минимум

$$L(x) = x_{11}^2 - x_{11} + 5x_{12} - x_{21}^3 + x_{21}^2 + 2x_{22}^2 - 5x_{22} + 2x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{2} x_{1j} = x_1, \ \ \sum_{j=1}^{2} x_{2j} = x_2, \qquad (2)$$
$$\sum_{i=1}^{2} x_{i1} = 4, \ \ \sum_{i=1}^{2} x_{i2} = 8, \qquad (3)$$
$$1 \le x_{11} \le 4, \ \ 0 \le x_{12} \le 5, \ \ 0 \le x_{21} \le 2, \ \ 2 \le x_{22} \le 6 \qquad (4)$$
$$0 \le x_1 \le \sum_{j=1}^{2} b_j = 12, \ \ 0 \le x_2 \le \sum_{j=1}^{2} b_j = 12, \qquad (5)$$

где $x = \left|x_{ij}\right|_{2,2}$.

Построим приближенную задачу. Интервалы [1,4], [0,2], [2,6] соответствующим переменным x_{11}, x_{21}, x_{22} разбиваем на $r_{11} = 3$, $r_{21} = 2$, $r_{22} = 4$ равных частей с шагом $h_{11} = 1$, $h_{21} = 1$, $h_{22} = 1$. Аналогично интервалы [0,12] и [0,12] соответствующим переменным x_1 и x_2 разбиваем $\tau_1 = 3$, $\tau_2 = 3$ частей с шагом $\theta_1 = 4$, $\theta_2 = 4$ (Zhusupbaev A., 2020).

Проведем необходимые вычисления, определим коэффициенты при переменных δ_{ijk}, $i = 1,2$, $j = 1,2$, $k = 1,2,\dots,r_{ij}$ и z_{iv}, $i = 1,2$, $v = 1,2,\dots,\tau_i$, а также значение величин $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\varphi_{ij0}$, $\sum_{i=1}^{2} f_{i0}$, т.е.

$$\frac{\Delta\varphi_{111}}{h_{11}} = 2, \ \ \frac{\Delta\varphi_{112}}{h_{11}} = 4, \ \ \frac{\Delta\varphi_{113}}{h_{11}} = 6, \ \ \frac{\Delta\varphi_{211}}{h_{21}} = 5, \ \ \frac{\Delta\varphi_{212}}{h_{21}} = 11,$$
$$\frac{\Delta\varphi_{221}}{h_{22}} = 5, \ \ \frac{\Delta\varphi_{222}}{h_{22}} = 9, \ \ \frac{\Delta\varphi_{223}}{h_{22}} = 13, \ \ \frac{\Delta\varphi_{224}}{h_{22}} = 17,$$
$$\frac{\Delta f_{11}}{\theta_1} = 8, \ \ \frac{\Delta f_{12}}{\theta_1} = 24, \ \ \frac{\Delta f_{13}}{\theta_3} = 40, \ \ \frac{\Delta f_{21}}{\theta_2} = 4, \ \ \frac{\Delta f_{22}}{\theta_2} = 12, \ \ \frac{\Delta f_{23}}{\theta_2} = 20,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\varphi_{ij0} = -2, \qquad \sum_{i=1}^{2} f_{i0} = 2.$$

Тогда приближенная задача нелинейной задачи (1)-(5) запишется в виде

Найти минимум

$$L(\delta, z) = 2\delta_{111} + 4\delta_{112} + 6\delta_{113} + 5x_{12} + 5\delta_{211} + 11\delta_{212} + 5\delta_{221} +$$
$$+9\delta_{222} + 13\delta_{223} + 17\delta_{224} + 8z_{11} + 24z_{12} + 40z_{13} +$$
$$+4z_{21} + 12z_{22} + 20z_{23}$$

при условиях

$1+\sum_{k=1}^{3}\delta_{11k}+x_{12}=\sum_{v=1}^{3}z_{1v}$,

$2+\sum_{k=1}^{2}\delta_{21k}+\sum_{k=1}^{4}\delta_{22k}=\sum_{v=1}^{3}z_{2v}$,

(7)

$\sum_{k=1}^{3}\delta_{11k}+\sum_{k=1}^{2}\delta_{21k}=3$,

$x_{12}+\sum_{k=1}^{4}\delta_{22k}=6$,

(8)

$0\le\delta_{11k}\le 1,\ \ k=1,2,3,$

$0\le\delta_{21k}\le 1,\ \ k=1,2,$ (9)

$0\le\delta_{22k}\le 1,\ \ k=1,2,3,4,\quad 0\le x_{12}\le 5,$ (10)

$0\le z_{1v}\le 4,\quad 0\le z_{2v}\le 4,\quad v=1,2,3.$ (11)

Преобразуем задачу (6)-(11) в транспортную. Введем дополнительные переменные $\xi_{iv}\ge 0,\ i=1,2,\ v=1,2,\dots,\tau_i$ и определим z_{iv} из системы неравенств (11), имеем

$$z_{iv}=4-\xi_{iv},\ \ i=1,2,\ \ v=1,2,3. \quad (12)$$

Подставляем значения z_{iv} из (12) в (7), получаем

$\sum_{k=1}^{3}\delta_{11k}+x_{12}+\sum_{v=1}^{3}\xi_{1v}=11$,

$\sum_{k=1}^{2}\delta_{21k}+\sum_{k=1}^{4}\delta_{22k}+\sum_{v=1}^{3}\xi_{2v}=10$, (13)

Далее, суммируя равенство $x_i=\sum_{v=1}^{4}z_{iv}$ по i, $i=1,2$ и используя (2), (3), имеем $\sum_{i=1}^{2}\sum_{v=1}^{3}z_{iv}=12$.

Теперь, введем дополнительные переменные $\zeta_{ijk}\ge 0, i=1,2\ ,\ j=1,2,\ k=1,2,\dots,r_{ij}$, $\zeta_{12}\ge 0$ и определим δ_{ijk}, x_{12} из системы (9), (10), получим

$$\delta_{11k}=1-\zeta_{11k}\,,\quad k=1,2,3,\quad \delta_{21k}=1-\zeta_{21k},\quad k=1,2,$$
$$\delta_{22k}=1-\zeta_{22k}\,,\quad k=1,2,3,4,\quad x_{12}=5-\zeta_{12}. \quad (14)$$

Поставляя значения $\delta_{ijk},\ k=1,2,\dots,r_{ij},\ j=1,2,\ i=1,2$ из (14) в (8) получим систему равенств

$$\sum_{k=1}^{3}\zeta_{11k}+\sum_{k=1}^{2}\zeta_{21k}=2,$$
$$\sum_{k=1}^{4}\zeta_{22k}+\zeta_{12}=3. \quad (15)$$

Таким образом, имеем следующую задачу транспортного типа заключающейся минимизации (6) при условиях (12)-(15), и не отрицательности переменных

$\delta_{ijk}\ge 0,\ \ \zeta_{ijk}\ge 0,\ \ k=1,2,\dots,r_{ij},\ \ \ i=1,2,\ \ j=1,2,$

$z_{iv}\ge 0,\ \ \xi_{iv}\ge 0,\ \ v=1,2,\dots,\tau_i,\ \ i=1,2,$ (16)

$x_{12}\ge 0.$

3. Результаты исследования

Обоснована возможность использования специального алгоритма метода последовательных расчетов для задачи размещения производства в случае, когда функции, определяющие производственные и транспортные затраты – линейные непрерывные на всей числовой оси за исключением начала координат, где имеют разрыв.

Приближенную задачу (6), (12)-(16) при помощи запрещающих тарифов запишем в виде транспортной таблицы (см.табл.1) и решим где М- запрещающий тариф.

Получим оптимальный план:

$$\delta^*=\{\delta_{111}=1,x_{12}=2,\delta_{211}=1,\delta_{212}=1,\delta_{221}=1,\delta_{222}=1,\delta_{223}=1,\delta_{224}=1\}$$
$$z^*=\{z_{11}=4,z_{21}=4,z_{22}=4\}.\quad L(\delta^*,z^*)=168{,}0.$$

Далее, определяем оптимальное решение исходной задачи, т.е.

$x^* = \{x_1 = 4,\ x_2 = 8\}$.

$|x_{ij}|_{2,2} = \{x_{11} = 2,\ x_{12} = 2,\ \ x_{21} = 2,\ x_{22} = 6\}$. $L(x^*)$ =148,0 (Эшенкулов П., 2004).

таблица 1

	← h_{11} →				← h_{21}→		← h_{22} →				← θ_1 →			← θ_2 →		
1	δ^1_{111}	δ_{112}	δ_{112}	x^1_{12}							ξ_{11}	ξ^4_{12}	ξ^4_{13}			
0					δ^1_{211}	1 δ^1_{212}	δ^1_{221}	δ^1_{222}	3 δ^1_{223}	7 δ^1_{224}				ξ_{21}	ξ_{22}	ξ^4_{23}
	ζ_{111}	ζ^1_{112}	ζ^1_{113}		ζ_{211}	ζ_{212}										
				ζ^3_{12}			ζ_{221}	ζ_{222}	ζ_{223}	ζ_{224}						
2											z^4_{11}	4 z_{12}	0 z_{13}	z_{21}	2 z^4_{22}	0 z_{23}

4. Дискуссия

Разработанные математические модели, методы и алгоритмы решения задач размещения с нелинейными функциями транспортных и производственных затрат могут быть использованы различными хозяйствующими субъектами республики для обоснования выбора оптимального варианта размещения производственных предприятий, объема производства и схемы вывоза продукции на рынок сбыта.

Доказана применимость метода последовательных расчетов для задачи размещения производства в случае, когда функции определяющие транспортные затраты – выпуклые непрерывные, а производственные затраты – выпуклые непрерывные и терпят разрыв в начале координат (Жусупбаева Г.А., 2011).

Обоснована применимость специального алгоритма для задачи размещения производства с нелинейными разрывными в нуле функциями производственных и транспортных затрат

5. Выводы

Используя экономико-математические модели и методы можно добиться существенных результатов в совершенствовании организации производства сельского хозяйства. Сформулирована задача размещения производства с выпуклыми функциями транспортных и производственных затрат, приведен способ решения задачи размещения производства в случае, когда функции выпуклы, непрерывны. Для решения задачи использован метод, основанный на линеаризации выпуклых функций входящих в целевую функцию. Применение этого метода позволило аппроксимировать задачу транспортной задачи линейного программирования. Способ решения задачи демонстрирован на числовом примере.

В заключении можем сказать, что проблема разработки экономико-математических моделей является достаточно актуальной в настоящее время, а ее успешность и востребованность заключается в умении применять модель для практического применения.

6. Список литературы

1. Жусупбаев А. Применение метода последовательных расчетов к

одной нелинейной задаче размещения производства// Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика – Воронеж, 2015 С. 378-382 https://doi.org/10.12737/14883

2. Zhusupbaev A. Mathematical model and method for calculating the optimization problem of livestock production // Herald of institute mathematics of the national academy of sciences of the KR – №1. 2020. С. 115-126. DOI:10.52448/16948173_2020_1_115

3. Жусупбаева Г.А. Решение нелинейнойтранспортно-производственной задачи методом последовательных расчетов // Проблемы информатики - Новосибирск СО РАН, № 3(11), 2011. С.10-14 https://elibrary.ru/item.asp?id=17013603

4. Эшенкулов П.,Жусупбаев А. EXCEL в примерах и задачах//- Бишкек, 2007.-168с.

5. Эшенкулов П. Методика решения задачи линейного программирования на компьютере / П. Эшенкулов, А. Жусупбаев, Т.Ч. Култаев // Ош: - ОшГУ, 2004. – 60 с.